目　　录

第一部分　算术

一、比和比例

1、比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 具有以下性质：

（1）$ad=bc$　　（2）$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

（3）$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$　　（4）$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

（5）$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比定理）

2、增长率问题

设原值为 a，变化率为 $p\%$，

若上升 $p\% \Rightarrow$ 现值 $=a(1+p\%)$

若下降升 $p\% \Rightarrow$ 现值 $=a(1-p\%)$

注意：　$甲比乙大p\% \Leftrightarrow \frac{甲-乙}{乙}=\mathrm{p}\%$

$甲是乙的p\% \Leftrightarrow 甲=乙\mathrm{p}\%$

3、增减性

$$\frac{a}{b}>1 \Rightarrow \frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b} ....(m>0)$$

$$0<\frac{a}{b}<1 \Rightarrow \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b} ....(m>0)$$

本题目可以用：所有分数，在分子分母都加上无穷（无穷大的符号无关）时，极限是 1 来辅助了解。助记：$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a+m}{b+m}=1$

二、指数和对数的性质

（一）指数

1、$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$　　2、$a^m \div a^n = a^{m-n}$

3、$(a^m)^n = a^{mn}$　　4、$(ab)^m = a^m b^m$

5、$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$　　6、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.......（$a \neq 0$）

7、当$a \neq 0$时，$a^0 = 1$

（二）对数 $(\log_a N, a > 0, a \neq 1)$

1、对数恒等式　$N = a^{\log_a N}$，更常用$N = e^{\ln N}$

2、$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

3、$\log_a(\dfrac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$

4、$\log_a(M^n) = n\log_a M$

5、$\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$

6、换底公式$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

7、$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

第二部分　初等代数

一、实数

（一）绝对值的性质与运算法则

1、$|a| \geq 0$(等号当且仅当$a=0$时成立)

2、$|a+b| \leq |a|+|b|$(等号当且仅当$ab \geq 0$时成立)

3、$|a-b| \geq |a|-|b|$　　等号当且仅当$ab \geq 0$且$|a|>|b|$时成立

4、$|ab| = |a||b|$

5、$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.........$(b \neq 0)$

6、当$k \geq 0$时，$|a| \geq k \Leftrightarrow a \geq k$或$a \leq -k$；$|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$

（二）绝对值的非负性

即$|a| \geq 0$，任何实数的绝对值非负

归纳：所有非负的变量

1、正的偶数次方（根式），如：$a^2, a^4, \ldots, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}$

2、负的偶数次方（根式），如：$a^{-2}, a^{-4}, \ldots, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{4}}$

3、指数函数　$a^x \ldots .(a > 0 且 a \neq 1)$

考点：若干个非负数之和为 0，则每个非负数必然都为 0.

（三）绝对值的三角不等式

$$|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|$$

右边等号当且仅当$ab \ge 0$时成立

左边等号当且仅当$ab \le 0$且$|a| > |b|$时成立

二、代数式的乘法公式与因式分解

1、　$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$　　（平方差公式）

2、$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$　　（二项式的完全平方公式

3、$(a+b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$　（巧记：正负正负）

4、$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$　　（立方差公式）

5、$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

三、方程与不等式

（一）一元二次方程

设一元二次方程为$ax^2+bx+c=0...(a\neq 0)$，则

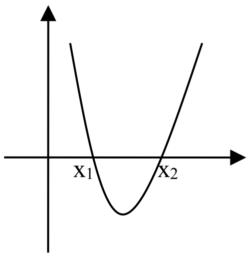
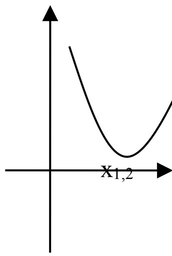
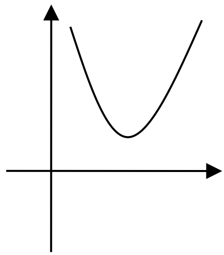
1、判别式

$$\Delta=b^2-4ac，\text{则}\Delta\text{的取值有三种情况}\begin{cases}>0.....\text{二不等实根}\\=0......\text{二相等实根}\\<0......\text{无实根}\end{cases}$$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的对称轴方程是 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$。用待定系数法求二次函数的解析式时，解析式的设法有 三 种形式，即 $f(x)=ax^2+bx+c$（一般式），

$f(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$（零点式）和 $f(x)=a(x-m)^2+n$（顶点式）。

2、判别式与根的关系之图像表达

△= b^2-4ac	△>0	△= 0	△< 0
f(x)= ax^2+bx+c (a>0)			
f(x) = 0 根	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$	无实根
f(x) > 0 解集	x < x_1 或 x > x_2	$x\neq-\frac{b}{2a}$	X∈R
f(x)<0 解集	x_1 < x < x_2	x ∈ϕ	x ∈ϕ

3、根与系数的关系（韦达定理）

x_1，x_2是方程$ax^2+bx+c=0..(a\neq0)$的两个根，则有

x_1，x_2是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 ⇄	$x_1+x_2=-b/a$ $x_1\cdot x_2=c/a$

利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值来：

（1）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

（2）$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

(4) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_1^2)$

$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

（二）、一元二次不等式

1、一元二次不等式的解，可以根据其对应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像来求解（参见上页的图像）。

2、一般而言，一元二次方程的根都是其对应的一元二次不等式的解集的临界值。

3、注意对任意 x 都成立的情况

（1）$ax^2+bx+c>0$ 对任意 x 都成立，则有：a>0 且△< 0

（2）$ax^2+bx+c<0$ 对任意 x 都成立，则有：a<0 且△< 0

4、要会根据不等式解集特点来判断不等式系数的特点

（三）其他几个重要不等式

1、平均值不等式，都对正数而言：

两个正数：$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

n 个正数：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

注意：平均值不等式，等号成立条件是，当且仅当各项相等。

2、两个正数 a、b 的调和平均数、几何平均数、算术平均数、均方根之间的关系是（助记：从小到大依次为：调和 •几何 •算 •方根）

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

注意：等号成立条件都是，当且仅当各项相等。

3、双向不等式是：$\left||a|-|b|\right| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$

左边在 $\underline{ab \leq 0 (\geq 0)}$ 时取得等号，右边在 $\underline{ab \geq 0 (\leq 0)}$ 时取得等号。

四、数列

（一）a_n 与 S_n 的关系

1、已知 a_n，求 S_n　　公式：$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

2、已知 S_n 求 a_n　　公式：$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 \\ S_n - S_{n-1} ....(n \geq 2) \end{cases}$

（二）等差数列

1、通项公式　$a_n = a_1 + (n-1)d$

2、前 n 项和的 3 种表达方式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$$

第三种表达方式的重要运用：如果数列前 n 项和是常数项为 0 的 n 的 2 项式，则该数列是等差数列。

3、特殊的等差数列 常数列 自然数列 奇数列 偶数列 etc.

4、等差数列的通项 a_n 和前 n 项和 S_n 的重要公式及性质

（1）通项 a_n（等差数列），有

$$a_m+a_n=a_k+a_{k+t}\text{......当}m+n=k+t\text{时成立}$$

（2）前 n 项和 S_n 的 2 个重要性质

Ⅰ. S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 仍为等差数列

Ⅱ. 等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别用 S_n 和 T_n 表示，

则： $\frac{a_k}{b_k}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

（三）等比数列

1、通项公式　　$a_n=a_1q^{n-1}\text{........}(q\neq 0)$

2、前 n 项和的 2 种表达方式，

(1)当 $(q\neq 1)$ 时

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n........(q\neq 1)$$

后一种的重要运用，只要是以 q 的 n 次幂与一个非 0 数的表达式，且 q 的 n 次幂的系数与该非 0 常数互为相反数，则该数列为等比数列

（2）当 $(q=1)$ 时　　$S_n=na_1................(a_1\neq 0)$

3、特殊等比数列　非 0 常数列　以 2、$\frac{1}{2}$、（-1）为底的自然次数幂

4、当等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足 $|q|$<1 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$=S=$\frac{a_1}{1-q}$。

5、等比数列的通项 a_n 和前 n 项和 S_n 的重要公式及性质

Ⅰ．若 m、n、p、q ∈ N，且 $m+n=p+q$，那么有 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$。

Ⅱ．前 n 项和 S_n 的重要性质：S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 仍为等比数列

五、排列、组合、二项式定理和古典概率

（一）排列、组合

1、排列 $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]=\frac{n!}{(n-m)!}$

2、全排列　$P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

3、组合

$$C_n^m = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}^{\text{从}n\text{开始往下依次相乘，刚好}m\text{项}}}{\underbrace{m!}_{\text{从1开始依次往上乘，刚好}m\text{项，正好是}m\text{的全排列}}} \underline{\underline{\text{恒等变形}}} \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

4、组合的 5 个性质（只有第一个比较常用）

（1）$C_n^m = C_n^{n-m}$

（2）$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$　（助记：下加 1 上取大）

（3）$\sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$　（见下面二项式定理）

（4）$rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$　（5）$C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$

（二）二项式定理

1、二项式定理：

$$(a+b)^n = \underbrace{C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n}_{\text{共}n+1\text{项}}$$

助记：可以通过二项式的完全平方式来协助记忆各项的变化

2、展开式的特征

（1）通项公式　第$k+1$项为：$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$

3、展开式与系数之间的关系

（1）$C_n^r = C_n^{n-r}$　与首末等距的两项系数相等

（2）$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$　展开式的各项系数和为2^n　（证明：令$a = b = 1$，即轻易得到结论）

（3）$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$，展开式中奇数项系数和等于偶数项系数和

（三）古典概率问题

1、事件的运算规律（类似集合的运算，建议用文氏图求解）

（1）事件的和、积满足交换律　$A + B = B + A, AB = BA$

（2）事件的和、积交满足结合律

$A(BC) = (AB)C, A + (B + C) = (A + B) + C$

（3）交和并的组合运算，满足交换律

$A(B + C) = (AB) + (AC),$

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

（4）德摩根定律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

（5）$\Omega \supset A \supset \Phi$

（6）集合自身以及和空集的运算

$A \cap A = A, A \cap \Phi = \Phi, A \cup A = A, A \cup \Phi = A, \overline{\overline{A}} = A, \overline{\Omega} = \Phi, \overline{\Phi} = \Omega$

（7）AB与$A\overline{B}$互不相容，且$A = AB \cup A\overline{B}$

(8) AB、$A\overline{B}$、$\overline{A}B$互不相容，且$A + B = \overline{A}B + AB + A\overline{B}$

2、古典概率定义

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中所包含的样本点数}}{\text{样本的总点数}}$$

3、古典概率中最常见的三类概率计算

（1）摸球问题；

（2）分房问题；

（3）随机取数问题

此三类问题一定要灵活运用事件间的运算关系，将一个较复杂的事件分解成若干个比较简单的事件的和、差或积等，再利用概率公式求解，才能比较简便的计算出较复杂的概率。

4、概率的性质

（1） $P(\Phi)=0$ 强调：但是不能从 $P(A)=0 \Rightarrow A$是空集

（2）有限可加性：若 $A_1,A_2,\dots,A_n$互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

(3)若 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 是一个完备事件组，则，$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$=1，特别的 $P(A)+P(\overline{A})=1$

5、概率运算的四大基本公式

（1）加法公式　$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

加法公式可以推广到任意个事件之和

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=0}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}^{n} A_i A_j+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n)$$

提示：各项的符号依次是正负正负交替出现。

(2)减法公式　$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

(3)乘法公式　$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$

(4) 德摩根定律

$$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B}),P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

6、伯努利公式

只有两个试验结果的试验成为伯努利试验。记为 A和$\overline{A}$，则在 n

重伯努利概型中 A发生k（$0\le k\le$）n次的概率$P(B_k)$ 的

概率为：$P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.......其中.$P(a)=p$

第三部分　几何

一、常见平几何图形

（一）多边形（包含三角形）之间的相互关系

1、n 边形的内角和=$(n-2)\times 180^0$........$(n\ge 3)$

n 边形的外角和一律为360^0........$(n\ge 3)$，与边数无关

2、平面图形的全等和相似

（1）全等：两个平面图形 A和B 的形状和大小都一样，则称为 A和B 全等，记做 $A \cong B$。全等的两个平面图形边数相同，对应角度也相等。

（2）相似：两个平面图形 A和B 的形状相同，仅仅大小不一样，则称为 A和B 相似，记做 $A \sim B$。相似的两个平面图形边数对应成比例，对应角度也相等。对应边之比称为相似比,记为 k。

（3）$S_A : S_B = k^2 ......k$为相似比，即两个相似的 A和B 的面积比等于相似比的平方。

（二）三角形

1、三角形三内角和 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$

2、三角形各元素的主要计算公式（参见三角函数部分的解三角形）

3、直角三角形

（1）勾股定理：对于直角三角形，有 $c^2 = a^2 + b^2 1$

（2）直角三角形的直角边是其外接圆的直径。

（三）平面图形面积

1、任意三角形的 6 个求面积公式

（1）$S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a$（已知底和高）;

提示：等底等高的三角形面积相等，与三角形的形状无关。

（2）$S_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$（已知三边和外接圆半径）;

（3）$S_\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（已知三个边）

备注：s为三角形的半周长，即$s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

（4）$S_{\Delta}=sr$（已知半周长和内切圆半径）

另外两个公式由于不考三角，不做要求。另外 2 个公式如下

（5）$S_{\Delta}=\frac{1}{2}bc\sin A$（已知任意两边及夹角）；

（6）$S_{\Delta}=2R^{2}\sin A\sin B\sin C$（已知三个角度和外接圆半径，不考）；

2、平行四边形：$\begin{aligned}&S=bh\text{.................(底乘以高)}\\&\ldots=ab\sin\varphi\text{.........(已知两边极其夹角)}\end{aligned}$

3、梯形：$S=\text{中位线}\times\text{高}=\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}$

4、扇形：$\begin{aligned}&S=\frac{1}{2}rl\text{..................}(\frac{1}{2}\text{倍弧长乘以半径})\\&\ldots.=\frac{1}{2}r^{2}\theta\text{............}(\because l=r\theta,\theta\text{为扇形的弧度})\end{aligned}$

5、圆：$S=\pi r^{2}$

二、平面解析几何

（一）有线线段的定比分点

1、若点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 成定比 λ，则 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$

2、若点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$

成定比 λ，则：$\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$；　$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，

$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

3、若在三角形 ABC 中，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，

则△ABC 的重心 G 的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

（二）平面中两点间的距离公式

1、数轴上两点间距离公式：$\left|AB\right|=\left|x_B-x_A\right|$

2、直角坐标系中两点间距离:$\left|P_1P_2\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

（三）直线

1、求直线斜率的定义式为 k=$tg\alpha$，两点式为 k=$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2、直线方程的 5 种形式：

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$，　斜截式：$y=kx+b$

两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，　截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

一般式：$Ax+By+C=0$

3、经过两条直线

l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$和l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直

线系方程是：$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$

4、两条直线的位置关系（设直线的斜率为k）

（1）$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$　（l_1，l_2不重合）

（2）l_1垂直$l_2 \Leftrightarrow k_1=-\dfrac{1}{k_2}$

（3）l_1与l_2相交，夹角为θ。（了解即可）

Ⅰ若：l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则$tg\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$。

Ⅱ若：l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则：

$$tg\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

Ⅲl_1与l_2的交点坐标为：$\begin{cases} x=\dfrac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1} \\ y=\dfrac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1} \end{cases}$

助记：分母相同，分子的小角标依次变化

5、点到直线的距离公式（重要）　点$P(x_0,y_0)$到直线

l：$Ax+By+C=0$的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

6、平行直线l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$距离：

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

（四）圆（到某定点的距离相等的点的轨迹）

1、圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

2、圆的一般方程式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$$

其中半径$r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$，圆心坐标$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$

思考：方程$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$在$D^2+E^2-4F=0$

和$D^2+E^2-4F<0$时各表示怎样的图形？

3、关于圆的一些特殊方程：

（1）已知直径坐标的，则：若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则以线段 AB 为直径的圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

（2）经过两个圆交点的，则：

过$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

（3）经过直线与圆交点的，则：

过l：$Ax+By+C=0$与圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的交点的圆的方程是：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$$

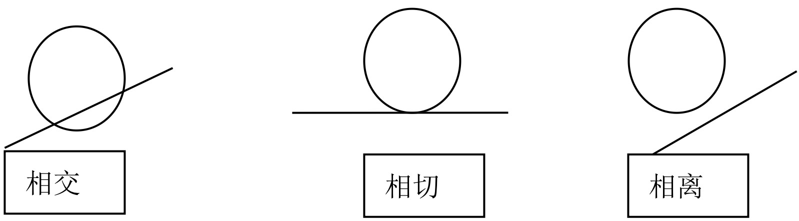
（4）过圆切点的切线方程为：$x_0x+y_0y=r^2$

重要推论（已知曲线和切点求其切线方程——就是把其中的一个x和y用$\frac{x+x_0}{2},\frac{y+y_0}{2}$替换后代入原曲线方程即可）：

例如，抛物线$y^2=4x$的以点$P(1,2)$为切点的切线方程是：

$2y=4\times\frac{x+1}{2}$，即：$y=x+1$。

1、直线与圆的位置关系



最常用的方法有两种，即：

（1）判别式法：Δ>0，=0，<0，等价于直线与圆相交、相切、相离；

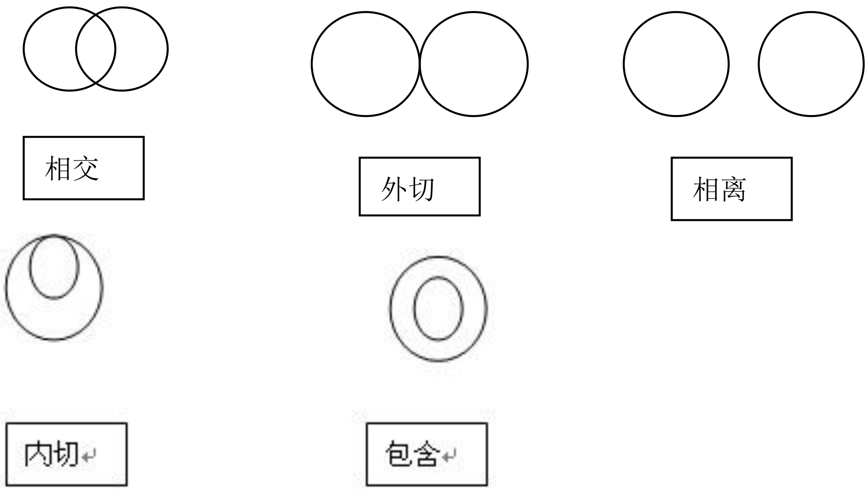
直线l：$AX+By+C=0$，圆$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$的半径为$r$，圆心$M\left(a,b\right)$到直线$l$的距离为$d$。又设方程组

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ AX+By+C=0\end{cases}$$（II）

则直线l与圆M相交$\Leftrightarrow d \prec r$，或方程组（II）有两组不同的实数解；
直线l与圆M相切$\Leftrightarrow d=r$，或方程组（II）有两组相同的实数解；
直线l与圆M相离$\Leftrightarrow d \succ r$，或方程组（II）无实数解。

（2）考查圆心到直线的距离与半径的大小关系：距离大于半径、等于半径、小于半径，等价于直线与圆相离、相切、相交。

2、两个圆的位置关系



圆C_1：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$的圆心$C_1(a_1,b_1)$,半径$r_1$,
圆C_2：$(x-a_{12})^2+(y-b_{12})^2=r_2^2$的圆心$C_2(a_2,b_2)$,半径$r_2$,

两圆的圆心距$d=|C_1,C_2|$,又设方程组

$$\begin{cases}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2\\(x-a_{12})^2+(y-b_{12})^2=r_2^2\end{cases}（\mathrm{III}）$$

圆C_1与圆C_2相交$\Leftrightarrow d \prec r_1+r_2$,或方程组（III）有两组不同的实数解；

圆C_1与圆C_2外切$\Leftrightarrow d = r_1+r_2$,或方程组（III）有两组相同的实数解；

圆C_1与圆C_2内切$\Leftrightarrow d = |r_1-r_2|$,或方程组（III）有两组相同的实数解；

圆C_1与圆C_2相离$\Leftrightarrow d \succ r_1+r_2$,或方程组（III）无实数解；

圆C_1内含在圆C_2内$\Leftrightarrow 0 \le d \prec |r_2-r_1|$,或方程组（III）无实数解。